

# MATEMATICĂ

Manual pentru clasa a XII-a

*M<sub>1</sub>*

**Trunchi comun**

**+**

**curriculum diferențiat**

Prefață .....	3
---------------	---

## ELEMENTE DE ALGEBRĂ

<b>Capitolul I. GRUPURI</b> .....	5	<b>Capitolul III. INELE DE POLINOAME</b> .....	104
<b>1. Legi de compoziție pe o mulțime</b> .....	5	<b>1. Mulțimea polinoamelor cu coeficienți</b> <b>într-un corp comutativ</b> .....	104
1.1. Definiții și exemple .....	5	1.1. Șiruri de elemente din corpul $K$ .....	104
1.2. Adunarea și înmulțirea modulo $n$ .....	6	1.2. Operații cu șiruri de elemente din corpul $K$ .....	104
1.3. Adunarea și înmulțirea claselor de resturi modulo $n$ .....	7	<b>2. Forma algebrică a polinoamelor</b> .....	107
1.4. Parte stabilă. Lege de compoziție indusă .....	9	2.1. Polinoame constante .....	107
1.5. Tabla unei legi de compoziție .....	10	2.2. Forma algebrică a unui monom .....	107
<b>2. Proprietăți ale legilor de compoziție</b> .....	14	2.3. Forma algebrică a unui polinom .....	108
2.1. Proprietatea de comutativitate .....	14	2.4. Valoarea unui polinom. Funcții polinomiale .....	109
2.2. Proprietatea de asociativitate .....	15	<b>3. Operații cu polinoame scrise sub formă    algebrică</b> .....	110
2.3. Element neutru .....	21	3.1. Adunarea și înmulțirea polinoamelor scrise sub formă algebrică .....	110
2.4. Elemente simetrizabile .....	24	3.2. Împărțirea polinoamelor .....	114
<b>3. Noțiunea de grup. Exemple</b> .....	31	3.3. Împărțirea la $X$ -a Schema lui Horner .....	120
3.1. Grupul aditiv al resturilor modulo $n$ ..	33	<b>4. Divizibilitatea polinoamelor</b> .....	125
3.2. Grupul claselor de resturi modulo $n$ ..	34	4.1. Relația de divizibilitate pe mulțimea $K[X]$ .....	125
3.3. Grupul permutărilor unei mulțimi .....	37	4.2. Proprietăți ale relației de divizibilitate .....	125
3.4. Grupul simetric $S_n$ .....	38	4.3. Cel mai mare divizor comun al polinoamelor .....	128
3.5. Grupuri de matrice .....	40	<b>5. Descompunerea polinoamelor în factori    ireductibili</b> .....	135
3.6. Grupul rădăcinilor de ordinul $n$ ale unității .....	43	5.1. Rădăcini ale polinoamelor .....	135
<b>4. Reguli de calcul într-un grup</b> .....	47	5.2. Rădăcini multiple ale unui polinom ..	137
4.1. Puterea unui element într-un grup ....	47	5.3. Ecuații algebrice .....	138
4.2. Legi de simplificare .....	48	5.4. Polinoame ireductibile în $K[X]$ .....	140
<b>5. Morfisme de grupuri</b> .....	53	5.5. Descompunerea polinoamelor în factori ireductibili .....	141
<b>6. Subgrupuri</b> .....	59	<b>6. Relațiile lui Viète</b> .....	147
<b>7. Grupuri finite</b> .....	66	<b>7. Rezolvarea ecuațiilor algebrice cu    coeficienți în <math>\mathbb{Z}, \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{C}</math></b> .....	153
7.1. Subgrupul generat de un element .....	66	7.1. Ecuații algebrice cu coeficienți în $\mathbb{Z}$ ..	153
7.2. Ordinul unui element într-un grup ....	66	7.2. Ecuații algebrice cu coeficienți raționali .....	157
7.3. Teoreme remarcabile în teoria grupurilor finite .....	68	7.3. Ecuații algebrice cu coeficienți reali ..	159
<b>Capitolul II. INELE ȘI CORPURI</b> .....	77	<b>8. Rezolvarea unor ecuații algebrice de grad    superior cu coeficienți în <math>\mathbb{C}</math></b> .....	162
<b>1. Definiții și exemple</b> .....	77	8.1. Ecuații bipătrate .....	162
1.1. Inelul claselor de resturi modulo $n$ ....	78	8.2. Ecuații binome .....	163
1.2. Inele de matrice pătratică .....	79	8.3. Ecuații reciproce .....	164
1.3. Inele de funcții reale .....	82		
<b>2. Reguli de calcul într-un inel</b> .....	85		
<b>3. Corpuri</b> .....	91		
<b>4. Morfisme de inele și corpuri</b> .....	96		

## ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

<b>Capitolul I. PRIMITIVE</b> .....	171	<b>6. Proprietăți ale integralei definite</b> .....	209
1. Probleme care conduc la noțiunea de integrală .....	171	<b>7. Integrarea funcțiilor continue</b> .....	220
2. Primitivele unei funcții		<b>8. Metode de calcul pentru integrale definite</b> .....	225
Integrala nedefinită a unei funcții .....	173	8.1. Metoda integrării prin părți .....	225
3. Proprietăți ale integralei nedefinite .....	176	8.2. Metoda schimbării de variabilă .....	231
4. Primitive uzuale .....	183	8.2.1. Prima metodă de schimbare de variabilă .....	231
4.1. Primitive deduse din derivatele funcțiilor elementare .....	183	8.2.2. A doua metodă de schimbare de variabilă .....	239
4.2. Primitive deduse din derivarea funcțiilor compuse .....	186	<b>9. Calculul integralelor funcțiilor raționale</b> ....	243
4.3. Primitive deduse din formula de derivare a produsului a două funcții .....	189	9.1. Calculul integralei unei funcții raționale simple .....	244
<b>Capitolul II. INTEGRALA DEFINITĂ</b> .....	194	9.2. Calculul integralei unei funcții raționale oarecare .....	255
1. Diviziuni ale unui interval $[a, b]$ .....	194	<b>Capitolul III. APLICAȚII ALE INTEGRALEI DEFINITE</b> .....	265
2. Sume Riemann .....	195	1. Aria unei suprafețe plane .....	265
3. Integrabilitatea unei funcții pe un interval $[a, b]$ .....	197	2. Volumul corpurilor de rotație .....	275
4. Integrabilitatea funcțiilor continue .....	202	3. Calculul unor limite de șiruri folosind integrala definită .....	280
5. Formula lui Leibniz-Newton .....	205		
<b>TEME DE SINTEZĂ</b> .....	288		
<b>INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI</b> .....	306		

# ELEMENTE DE ALGEBRĂ

## I. GRUPURI

### 1 Legi de compoziție pe o mulțime

#### 1.1. Definiții și exemple

Din studiul diferitelor operații întâlnite până acum (adunarea și înmulțirea numerelor, compunerea funcțiilor, adunarea și înmulțirea matricelor etc.) se pot desprinde concluziile:

– există o mare diversitate atât în ceea ce privește natura mulțimilor pe care sunt definite aceste operații (numere, funcții, matrice, vectori, șiruri, perechi ordonate...), cât și în ceea ce privește regulile specifice după care se operează cu elementele acestor mulțimi;

– operațiile algebrice întâlnite au o serie de proprietăți comune, indiferent de natura elementelor asupra cărora operează (comutativitate, asociativitate etc.).

Reținând aspectele esențiale ale operațiilor, în acest capitol se va face o prezentare a acestora într-o formă generală prin intermediul conceptului de lege de compoziție, concept care dă posibilitatea folosirii metodei axiomatice în algebră.

#### ❖ DEFINIȚII

Fie  $M$  o mulțime nevidă.

- O aplicație  $\varphi : M \times M \rightarrow M$ ,  $(x, y) \rightarrow \varphi(x, y)$  se numește **lege de compoziție** (operație algebrică) pe mulțimea  $M$ .
- Elementul  $\varphi(x, y) \in M$ , care corespunde prin aplicația  $\varphi$  perechii ordonate  $(x, y) \in M \times M$  se numește **compusul** lui  $x$  cu  $y$  prin legea de compoziție  $\varphi$ .

#### ☞ Exemple de legi de compoziție

- ♦ Operația de adunare „+” și operația de înmulțire „·” pe mulțimile de numere  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{C}$ :

$$„+”: \mathbf{N} \times \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}, (x, y) \rightarrow x + y,$$

$$„\cdot”: \mathbf{N} \times \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}, (x, y) \rightarrow x \cdot y,$$

$$„+”: \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}, (x, y) \rightarrow x + y,$$

$$„\cdot”: \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}, (x, y) \rightarrow x \cdot y, \text{ etc.}$$

- ♦ Operația de adunare „+” pe mulțimea  $\mathcal{V}$  a vectorilor din plan:  
„+”:  $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ ,  $(\bar{a}, \bar{b}) \rightarrow \bar{a} + \bar{b}$ .
- ♦ Operațiile de reuniune „ $\cup$ ”, intersecție „ $\cap$ ”, diferență „ $\setminus$ ”, diferență simetrică „ $\Delta$ ”, pe mulțimea  $\mathcal{P}(M)$  a părților (submulțimilor) unei mulțimi  $M$ :  
„ $\cup$ ”:  $\mathcal{P}(M) \times \mathcal{P}(M) \rightarrow \mathcal{P}(M)$ ,  $(A, B) \rightarrow A \cup B$ ,  
„ $\cap$ ”:  $\mathcal{P}(M) \times \mathcal{P}(M) \rightarrow \mathcal{P}(M)$ ,  $(A, B) \rightarrow A \cap B$ , etc.
- ♦ Operația de compunere „ $\circ$ ” a funcțiilor pe mulțimea  $\mathcal{F}(M) = \{f \mid f : M \rightarrow M\}$ :  
„ $\circ$ ”:  $\mathcal{F}(M) \times \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M)$ ,  $(f, g) \rightarrow f \circ g$ .

Legile de compoziție sunt date în diferite notații:

- În notație aditivă se scrie  $\varphi(x, y) = x + y$ ; elementul  $x + y \in M$  se numește **suma** lui  $x$  cu  $y$ , iar operația  $\varphi$  se numește **adunare**.
  - În notație multiplicativă se scrie  $\varphi(x, y) = x \cdot y$ ; elementul  $x \cdot y \in M$  se numește **produsul** lui  $x$  cu  $y$ , iar operația  $\varphi$  se numește **înmulțire**.
- Deseori, dacă  $\varphi : M \times M \rightarrow M$  este o lege de compoziție (operație algebrică) pe mulțimea  $M$ , în loc de notația  $\varphi(x, y)$  se folosesc notațiile  $x \varphi y$ ,  $x \circ y$ ,  $x * y$ ,  $x \top y$ ,  $x \perp y$  etc.

### Exercițiu rezolvat

☒ Pe mulțimea  $\mathbb{R}$  se definește operația algebrică „ $\top$ ”, astfel:

$$\top : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow x \top y = xy - x - y.$$

- Să se calculeze  $2 \top 3$ ,  $5 \top (-3)$ ,  $(-6) \top (-8)$ .
- Pentru care elemente  $x \in \mathbb{R}$ , avem  $x \top 2 = 8$ ?
- Să se rezolve ecuația  $x \top (x+1) = 1$ .

#### Soluție

a)  $2 \top 3 = 2 \cdot 3 - 2 - 3 = 1$ ;  $5 \top (-3) = 5 \cdot (-3) - 5 - (-3) = -17$ , iar  $(-6) \top (-8) = (-6) \cdot (-8) - (-6) - (-8) = 62$ .

b) Avem:  $x \top 2 = x \cdot 2 - x - 2 = x - 2$ . Din egalitatea  $x - 2 = 8$  se obține  $x = 10$ .

c) Avem:  $x \top (x+1) = x(x+1) - x - (x+1) = x^2 - x - 1$ . Rezultă ecuația  $x^2 - x - 2 = 0$  cu soluțiile  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 2$ . Așadar:  $(-1) \top 0 = +1$  și  $2 \top 3 = +1$ .

## 1.2. Adunarea și înmulțirea modulo $n$

Fie  $n \in \mathbb{N}^*$  un număr natural și  $a \in \mathbb{Z}$ . Din teorema împărțirii cu rest a numerelor întregi rezultă că există și sunt unice numerele  $q \in \mathbb{Z}$  și  $r \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$  cu proprietatea  $a = nq + r$ .

Numărul natural  $r$  care reprezintă restul împărțirii lui  $a$  la  $n$ , se notează  **$a \bmod n$**  (se citește „ $a$  modulo  $n$ ”) și se numește **redușul modulo  $n$**  al numărului  $a$ .

Așadar,  **$r = a \bmod n$** .

Astfel, dacă  $n = 6$ , atunci:

$$15 \bmod 6 = 3, \quad 5 \bmod 6 = 5, \quad (-10) \bmod 6 = 2.$$

Pe mulțimea  $\mathbf{Z}$  definim următoarele legi de compoziție:

**a)  $\oplus : \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ ,  $a \oplus b = (a + b) \bmod n$ , numită **adunarea modulo  $n$** .**

$a \oplus b$  se numește **suma modulo  $n$**  a lui  $a$  cu  $b$ .

**b)  $\odot : \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ ,  $a \odot b = (ab) \bmod n$ ,**

numită **înmulțirea modulo  $n$** .

$a \odot b$  se numește **produsul modulo  $n$**

al lui  $a$  cu  $b$ .

Astfel, pentru  $n = 8$ , avem:

$$6 \oplus 10 = (6 + 10) \bmod 8 = 16 \bmod 8 = 0;$$

$$7 \oplus 12 = (7 + 12) \bmod 8 = 19 \bmod 8 = 3;$$

$$4 \odot 3 = (4 \cdot 3) \bmod 8 = 12 \bmod 8 = 4;$$

$$(-2) \odot 5 = [(-2) \cdot 5] \bmod 8 = (-10) \bmod 8 = 6.$$

**TEMĂ**

Pentru  $n = 6$ , calculați:

$2 \oplus 5,$	$2 \odot 5,$
$16 \oplus 9,$	$9 \odot 4,$
$(-2) \oplus 3,$	$(-5) \odot 5,$
$(-7) \oplus (-9),$	$(-9) \odot (-5),$
$(2 \oplus 9) \odot 3,$	$(3 \odot 7) \oplus 8.$

### 1.3. Adunarea și înmulțirea claselor de resturi modulo $n$

Fie  $n \in \mathbf{N}^*$  un număr natural fixat. Pentru  $a \in \mathbf{Z}$  notăm  $\hat{a} = \{a + nk \mid k \in \mathbf{Z}\}$  și  $r = a \bmod n$  restul împărțirii lui  $a$  la  $n$ .

Din teorema împărțirii cu rest, rezultă că există  $q \in \mathbf{Z}$  astfel încât  $a = nq + r$ .

$$\text{Atunci, } \hat{a} = \{a + nk \mid k \in \mathbf{Z}\} = \{r + nq + nk \mid k \in \mathbf{Z}\} = \{r + nh \mid h \in \mathbf{Z}\} = \hat{r}.$$

Așadar, în determinarea mulțimii  $\hat{a}$  este esențial să cunoaștem restul împărțirii lui  $a$  la  $n$ .

Mulțimea  $\hat{a}$  se numește **clasa de resturi modulo  $n$**  a lui  $a$ .

Deoarece resturile obținute la împărțirea cu  $n$  a numerelor întregi pot fi  $0, 1, 2, \dots, n - 1$ , rezultă că există numai  $n$  clase de resturi modulo  $n$  distincte două câte două și acestea pot fi considerate  $\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \dots, \widehat{n-1}$ .

Mulțimea claselor de resturi modulo  $n$  se notează cu  $\mathbf{Z}_n$  și putem

scrie  **$\mathbf{Z}_n = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \dots, \widehat{n-1}\}$** .

Pe mulțimea  $\mathbf{Z}_n$  se definesc următoarele legi de compoziție:

a) „+“:  $\mathbf{Z}_n \times \mathbf{Z}_n \rightarrow \mathbf{Z}_n$ ,  $\hat{a} + \hat{b} = \widehat{a \oplus b}$ , numită **adunarea claselor de resturi** modulo  $n$ , iar  $\hat{a} + \hat{b}$  se numește **suma** claselor  $\hat{a}$  și  $\hat{b}$ ;

b) „·“:  $\mathbf{Z}_n \times \mathbf{Z}_n \rightarrow \mathbf{Z}_n$ ,  $\hat{a} \cdot \hat{b} = \widehat{a \odot b}$ , numită **înmulțirea claselor de resturi** modulo  $n$ , iar  $\hat{a} \cdot \hat{b}$  se numește **produsul** claselor  $\hat{a}$  și  $\hat{b}$ .

**Exemple**

♦ Fie  $\mathbf{Z}_4 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}\}$ . Atunci avem:  $\hat{2} + \hat{1} = \hat{3}$ ;  $\hat{2} + \hat{3} = \hat{1}$ ;  $\hat{2} + \hat{2} = \hat{0}$  etc.

De asemenea:  $\hat{2} \cdot \hat{2} = \hat{0}$ ;  $\hat{2} \cdot \hat{3} = \hat{2}$ ;  $\hat{3} \cdot \hat{3} = \hat{1}$ .

♦ În  $\mathbf{Z}_5 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}\}$  avem:  $\hat{2} + \hat{1} = \hat{3}$ ,  $\hat{2} + \hat{3} = \hat{0}$ ,  $\hat{2} + \hat{2} = \hat{4}$ ,  $\hat{4} + \hat{3} = \hat{2}$  etc.

De asemenea:  $\hat{2} \cdot \hat{2} = \hat{4}$ ,  $\hat{2} \cdot \hat{3} = \hat{1}$ ,  $\hat{3} \cdot \hat{3} = \hat{4}$ ,  $\hat{4} \cdot \hat{3} = \hat{2}$  etc.

*Exerciții rezolvate*

☒ 1. Să se calculeze în  $\mathbf{Z}_7$ :

a)  $(\hat{2})^3$ ;      b)  $(\hat{3} \cdot \hat{4}) \cdot \hat{6}$ ;      c)  $(\hat{3})^4 + (\hat{5})^3$ .

Soluție

Avem: a)  $(\hat{2})^3 = \hat{2} \cdot \hat{2} \cdot \hat{2} = \hat{4} \cdot \hat{2} = \hat{1}$ ;      b)  $(\hat{3} \cdot \hat{4}) \cdot \hat{6} = \hat{5} \cdot \hat{6} = \hat{2}$ ;

c)  $(\hat{3})^4 + (\hat{5})^3 = \hat{3} \cdot \hat{3} \cdot \hat{3} \cdot \hat{3} + \hat{5} \cdot \hat{5} \cdot \hat{5} = \hat{2} \cdot \hat{3} \cdot \hat{3} + \hat{4} \cdot \hat{5} = \hat{6} \cdot \hat{3} + \hat{6} = \hat{4} + \hat{6} = \hat{3}$ .

☒ 2. Să se rezolve în  $\mathbf{Z}_4$  ecuația  $\hat{2}x^2 + \hat{2}x = \hat{0}$ .

Soluție

Soluțiile ecuației pot fi doar elemente ale mulțimii  $\{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}\}$ .

Fie  $f(x) = \hat{2}x^2 + \hat{2}x$ . Avem:

- $f(\hat{0}) = \hat{2} \cdot \hat{0} + \hat{2} \cdot \hat{0} = \hat{0} + \hat{0} = \hat{0}$ ;
- $f(\hat{1}) = \hat{2} \cdot \hat{1} + \hat{2} \cdot \hat{1} = \hat{2} + \hat{2} = \hat{0}$ ;
- $f(\hat{2}) = \hat{2} \cdot \hat{0} + \hat{2} \cdot \hat{2} = \hat{0} + \hat{0} = \hat{0}$ ;
- $f(\hat{3}) = \hat{2} \cdot \hat{1} + \hat{2} \cdot \hat{3} = \hat{2} + \hat{2} = \hat{0}$ .

☐ **TEMĂ**  
 Rezolvați ecuațiile:  
 a)  $\hat{3}x + \hat{5} = \hat{0}$ , în  $\mathbf{Z}_6$ ;  
 b)  $\hat{3}x^2 + \hat{3}x = \hat{0}$ , în  $\mathbf{Z}_6$ ;  
 c)  $\hat{2}x^3 + \hat{3}x + \hat{2} = \hat{0}$ , în  $\mathbf{Z}_4$ .

În concluzie, soluțiile ecuației date sunt  $\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}$ . După cum se observă, ecuațiile de gradul 2, pe mulțimi diferite de cele uzuale, pot avea mai mult de două soluții.

### 1.4. Parte stabilă. Lege de compoziție indusă

Fie  $M$  o mulțime nevidă și „ $\circ$ ”:  $M \times M \rightarrow M$  o lege de compoziție pe  $M$ .

#### ❖ DEFINIȚIE

• O submulțime  $S \subset M$  se numește **parte stabilă** a lui  $M$  în raport cu legea de compoziție „ $\circ$ ” dacă:  $\forall x, y \in S$  implică  $x \circ y \in S$ .

Pentru cazul  $S = M$  se spune că  $M$  este parte stabilă în raport cu legea de compoziție „ $\circ$ ”.

#### 📖 Exemple

- ♦ Mulțimile de numere  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$  sunt părți stabile ale lui  $\mathbb{R}$  în raport cu operațiile de adunare și de înmulțire a numerelor reale.
- ♦ Mulțimile  $p\mathbb{N} = \{px \mid x \in \mathbb{N}\}$ , cu  $p \in \mathbb{N}$  sunt părți stabile ale lui  $\mathbb{N}$  în raport cu operațiile de adunare și de înmulțire a numerelor naturale.
- ♦ Fie  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  mulțimea matricelor pătrate cu elemente din mulțimea  $\mathbb{C}$ . Submulțimea  $S \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  a matricelor inversabile este parte stabilă a lui  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  în raport cu înmulțirea matricelor.

#### Exerciții rezolvate

☒ 1. Fie  $H \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ ,  $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a^2 + b^2 = 1 \right\}$ . Să se arate că  $H$  este parte stabilă a mulțimii  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  în raport cu înmulțirea matricelor.

#### Soluție

Fie  $A, B \in H$ ,  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$  și  $a^2 + b^2 = 1$ ,  $x^2 + y^2 = 1$ . Se

$$\text{obține: } AB = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - by & ay + bx \\ -ay - bx & -by + ax \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Folosind proprietatea  $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$ , rezultă că:

$$\det(AB) = (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = 1 \text{ și astfel } (ax - by)^2 + (ay + bx)^2 = 1. \quad (2)$$

Din relațiile (1) și (2) rezultă că  $AB \in H$ , deci  $H$  este parte stabilă a mulțimii  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  în raport cu înmulțirea.

☒ 2. Să se arate că mulțimea  $\mathcal{R}_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$  este parte stabilă a lui  $\mathbb{Z}$  în raport cu adunarea modulo  $n$  și înmulțirea modulo  $n$ .

Soluție

Dacă  $a, b \in \mathcal{R}_n$ , atunci, din definiție,  $a \oplus b$  și  $a \odot b$  reprezintă restul împărțirii numerelor  $a + b$  și  $a \cdot b$  la  $n$ . În concluzie,  $a \oplus b$  și  $a \odot b$  sunt elemente ale lui  $\mathcal{R}_n$ .

Dacă  $H$  este parte stabilă a lui  $M$  în raport cu legea de compoziție  $\varphi : M \times M \rightarrow M$ , atunci pe mulțimea  $H$  se poate defini o lege de compoziție  $\psi : H \times H \rightarrow H$ , considerând  $\psi(x, y) = \varphi(x, y), \forall x, y \in H$ .

Legea de compoziție  $\psi$  se numește **legea de compoziție indusă** pe mulțimea  $H$  de către legea de compoziție  $\varphi$ .

Pentru simplificarea scrierii, se obișnuiește să se folosească aceeași notație pentru legea de compoziție pe  $M$  și legea de compoziție indusă pe  $H$ .

### 1.5. Tabla unei legi de compoziție

Fie  $M$  o mulțime finită,  $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  și  $\varphi : M \times M \rightarrow M$  o lege de compoziție pe  $M$ .

Legea de compoziție  $\varphi$  poate fi descrisă printr-un tablou cu  $n$  linii și  $n$  coloane corespunzător elementelor  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . La intersecția liniei  $i$  cu coloana  $j$  se află elementul  $\varphi(a_i, a_j)$ .

$\varphi$	$a_1$	$a_2$	...	$a_j$	...	$a_n$
$a_1$				⋮		
$a_2$				⋮		
⋮				⋮		
$a_i$	.....			$\varphi(a_i, a_j)$		.....
⋮				⋮		
$a_n$				⋮		

Acest tablou se numește **tabla legii de compoziție** sau **tabla lui Cayley**.

Tabla unei legi de compoziție are un rol deosebit în perfecționarea calculurilor algebrice, precum și în verificarea unor proprietăți ale legii de compoziție.

### Exerciții rezolvabile

- 1. Fie  $H = \{z \in \mathbb{C} \mid z^4 = 1\}$ . Să se arate că  $H$  este parte stabilă a mulțimii  $\mathbb{C}$  în raport cu înmulțirea numerelor complexe.

Soluție

Ecuția  $z^4 = 1$  se scrie  $(z^2 - 1)(z^2 + 1) = 0$ , de unde se obține  $z \in \{-1, 1, i, -i\} = H$ . Alcătuim tabla operației de înmulțire pe  $H$ .

.	-1	1	-i	i
-1	1	-1	i	-i
1	-1	1	-i	i
-i	i	-i	-1	1
i	-i	i	1	-1

După cum se observă din tabla operației, toate rezultatele obținute în urma compunerii elementelor aparțin mulțimii  $H$ . În concluzie, mulțimea  $H$  este parte stabilă a lui  $\mathbb{C}$  în raport cu înmulțirea.

- ☒ **2.** Să se alcătuiască tablele operațiilor de adunare și de înmulțire modulo 4 pe  $\mathcal{R}_4$  și de adunare și de înmulțire pe mulțimea claselor de resturi  $\mathbb{Z}_4$ .

Soluție

Având în vedere modul în care s-au definit operațiile pe mulțimile  $\mathcal{R}_4$  și  $\mathbb{Z}_4$ , avem:

$\oplus$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$\odot$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

$+$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$
$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$

$\cdot$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$
$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$
$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{2}$	$\hat{1}$

- ☒ **3.** Pe mulțimea  $\mathbb{D}$  se consideră legea de compoziție  $x \circ y = xy + x + y$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{D}$ . Să se arate că mulțimea  $M = [-2, 0]$  este parte stabilă a lui  $\mathbb{D}$  în raport cu legea de compoziție „ $\circ$ ”.

Soluție

Trebuie arătat că dacă  $x, y \in [-2, 0]$ , atunci  $x \circ y \in [-2, 0]$ . Deoarece  $x, y \in [-2, 0]$ , rezultă că  $-2 \leq x \leq 0$ ,  $-2 \leq y \leq 0$  sau  $-1 \leq x + 1 \leq 1$ ,  $-1 \leq y + 1 \leq 1$  și se obțin inegalitățile  $|x + 1| \leq 1$ ,  $|y + 1| \leq 1$ . Prin înmulțire, avem inegalitatea  $|(x + 1)(y + 1)| \leq 1$ , care se scrie sub forma  $-1 \leq (x + 1)(y + 1) \leq 1$ . După reducere se obține:  $-2 \leq xy + x + y \leq 0$ , deci  $x \circ y \in [-2, 0]$ .

EXERCITII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Pe mulțimea  $Z$  se definește operația algebrică „ $\circ$ ” astfel:  $x \circ y = 2x + y - 3, \forall x, y \in Z$ .

- a) Să se calculeze  $4 \circ 7, 8 \circ (-1), (-8) \circ 3$  și  $3 \circ (-8)$ .
- b) Să se afle valorile  $x \in Z$  pentru care  $x \circ (3x - 1) = 6$ .
- c) Să se rezolve ecuația  $(x + 1) \circ 3 = 5 \circ (x^2 - 8)$ .

E2. Pe mulțimea  $\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$

definim operația algebrică  $A \perp B = 3A - 2B, \forall A, B \in \mathcal{M}$ .

- a) Să se arate că  $I_2 \in \mathcal{M}$ .
- b) Să se calculeze  $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ .
- c) Să se determine  $a \in \mathbb{R}$ , știind că  $\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 & a^2 \\ a^2 & 1 \end{pmatrix} = I_2$ .

E3. Să se calculeze:

- a)  $18 \bmod 5; 28 \bmod 6; 17 \bmod 8; (-3) \bmod 4;$
- b)  $5 \oplus 4; 6 \oplus 11; (-2) \oplus 5; (-4) \oplus \oplus (-13)$ , dacă  $n = 9;$
- c)  $2 \circ 7; 5 \circ 8; (-3) \circ 17; (-5) \circ \circ (-11)$ , dacă  $n = 10$ .

E4. Să se calculeze:

- a)  $\widehat{23}, \widehat{21}, \widehat{9}, \widehat{-3}, \widehat{-7}$  în  $Z_3;$
- b)  $\widehat{2} + \widehat{11}, \widehat{3} + \widehat{7}, \widehat{5} + \widehat{9}$  în  $Z_4;$
- c)  $\widehat{2} \cdot \widehat{4}, \widehat{4} \cdot \widehat{3}, (\widehat{3})^3, (\widehat{5})^4$  în  $Z_6;$
- d)  $(\widehat{2} + \widehat{3}) \cdot (\widehat{4} + \widehat{5}) \cdot (\widehat{3} + \widehat{6})$  în  $Z_7$ .

E5. Să se rezolve ecuațiile:

- a)  $\widehat{2x} + \widehat{1} = \widehat{0}$ , în  $Z_3;$

- b)  $x^2 + \widehat{1} = \widehat{0}$ , în  $Z_5;$
- c)  $\widehat{3x^2} - \widehat{5x} + \widehat{2} = \widehat{0}$ , în  $Z_4;$
- d)  $x^3 + \widehat{2x} + \widehat{3} = \widehat{0}$ , în  $Z_5$ .

E6. Pe mulțimea  $\mathbb{R}$  se definesc operațiile algebrice  $x \circ y = x + y - xy$  și  $x \top y = x - y + 2xy, \forall x, y \in \mathbb{R}$ . Să se rezolve:

- a) ecuația  $x \circ x = x \top x;$
- b) sistemul  $\begin{cases} (x + 3y) \circ 3 = -19 \\ (x - 2y) \top 2 = -22 \end{cases}$

E7. Pe mulțimea  $M = \{0, 1, 2, 3, 4\}$  se consideră legea de compoziție  $x \circ y = |x - y|, \forall x, y \in M$ . Să se alcătuiască tabla operației și să se arate că  $M$  este parte stabilă în raport cu această lege de compoziție.

E8. Să se alcătuiască tabla operației „ $\circ$ ” pe mulțimea  $M$  și să se studieze dacă mulțimea este parte stabilă în raport cu „ $\circ$ ”, dacă:

- a)  $M = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ divide } 12\},$   
 $x \circ y = \text{c.m.m.d.c.}(x, y);$
- b)  $M = \{2, 3, 4, 5\},$   
 $x \circ y = \min(x, y);$
- c)  $M = \{0, 1, 2, 3, 4\},$   
 $x \circ y = \max(x, y).$

E9. Să se arate că mulțimea  $M$  este parte stabilă în raport cu legea de compoziție specificată:

- a)  $M = [2, +\infty), x \circ y = xy - 2(x + y) + 6;$
- b)  $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ , în raport cu adunarea matricelor;

$$c) M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C}, a^2 - 2b^2 = 1 \right\},$$

în raport cu înmulțirea matricelor.

E10. Pe mulțimea  $M = \{1, 2, 3, 4\}$  se consideră operația algebrică „ $\circ$ ” a cărei tablă este dată mai jos:

$\circ$	1	2	3	4
1	1	3	4	1
2	1	3	4	2
3	2	1	3	4
4	4	3	2	1

a) Să se determine  $x = 1 \circ (2 \circ 3)$ ,

$y = 4 \circ (3 \circ 2)$ ,  $z = (1 \circ 2) \circ (3 \circ 4)$ .

b) Să se rezolve ecuațiile  $x \circ 2 = 4$ ,  
 $4 \circ x = 2$  și  $x \circ 2 \circ x = 1$ .

c) Să se rezolve sistemele de ecuații:

$$\begin{cases} x \circ 2 = y \\ y \circ 2 = x \end{cases} \text{ și } \begin{cases} x \circ y = 1 \\ (x+1) \circ y = 1 \end{cases}$$

E11. Fie  $\mathcal{M} = \left\{ A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{C} \right\}$  și legea

de compoziție  $X \perp Y = X + Y - I_2$ ,

$\forall X, Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  definită pe mulțimea

$\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ .

Să se arate că mulțimea  $\mathcal{M}$  este parte stabilă a mulțimii  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  în raport cu operația de înmulțire a matricelor și în raport cu operația „ $\perp$ ”.

## APROFUNDARE

A1. Să se determine mulțimile  $M \subset \mathbb{Z}_4$ , care sunt părți stabile ale lui  $\mathbb{Z}_4$  în raport cu operația de adunare.

A2. Să se arate că mulțimea  $M$  este parte stabilă în raport cu operația specificată:

a)  $M = (a, +\infty)$ ,  $x \circ y = xy - a(x+y) + a^2 + a$ ;

b)  $M = [4, 6]$ ,  $x \circ y = xy - 5(x+y) + 30$ ;

c)  $M = (-1, 1)$ ,  $x \circ y = \frac{x+y}{1+xy}$ .

A3. Pe mulțimea  $M = (2, +\infty)$  se consideră legea de compoziție:

$$x \circ y = \frac{xy - 2}{x + y - 3}, \quad \forall x, y \in M.$$

Să se arate că  $M$  este parte stabilă în raport cu „ $\circ$ ”.

A4. Se consideră mulțimea

$$\mathbb{Z}[\sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

Să se arate că:

a) mulțimea  $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$  este parte sta-

bilă în raport cu adunarea și înmulțirea;

b) mulțimea  $M = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}, a^2 - 3b^2 = 1\}$  este parte stabilă a mulțimii  $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$  în raport cu înmulțirea.

A5. Se consideră funcțiile

$$f_1, f_2, f_3, f_4 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = \frac{1}{x}, \quad f_3(x) = -x,$$

$$f_4(x) = -\frac{1}{x}.$$

Să se arate că mulțimea  $M = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$  este parte stabilă în raport cu compunerea funcțiilor.

A6. Fie  $M = (2, +\infty)$  și legea de compoziție pe  $M$ :  $x \circ y = xy - 2x - 2y + a$ ,

$\forall x, y \in M$ .

a) Să se determine valoarea minimă a lui  $a \in \mathbb{R}$ , astfel încât  $M$  să fie parte stabilă în raport cu „ $\circ$ ”.

b) Să se rezolve ecuația  $4 \circ x = 8$ .

c) Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} (x+2) \circ (y-3) = 46 \\ (2x+1) \circ (y+1) = 59 \end{cases}, \text{ pentru } a = 50.$$

A7. Să se studieze dacă mulțimea  $M$  este parte stabilă a lui  $\mathbb{C}$  în raport cu înmulțirea:

a)  $M = \{z \in \mathbb{C} \mid z^3 = 1\}$ ;

b)  $M = \{z \in \mathbb{C} \mid z = \bar{z}\}$ ;

c)  $M = \{z \in \mathbb{C} \mid z^2 = \bar{z}\}$ ;

d)  $M = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) = 0\}$ .

A8. Să se determine mulțimile finite  $M \subset \mathbb{R}$ , care sunt părți stabile ale lui  $\mathbb{R}$  în raport cu operația de înmulțire. Aceeași problemă pentru mulțimea  $\mathbb{C}$ .

A9. Fie  $M$  o mulțime cu 3 elemente. Să se determine numărul legilor de compoziție care se pot defini pe mulțimea  $M$ . Generalizare.

## 2 Proprietăți ale legilor de compoziție

### 2.1. Proprietatea de comutativitate

Fie  $M$  o mulțime nevidă.

#### ❖ DEFINIȚIE

• Legea de compoziție „ $\circ$ ”:  $M \times M \rightarrow M, (x, y) \rightarrow x \circ y$  se numește **comutativă** dacă  $x \circ y = y \circ x, \forall x, y \in M$ .

#### ☞ Exemple de legi de compoziție comutative

- Adunarea și înmulțirea pe mulțimile de numere  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ . Avem:  
 $x + y = y + x$  și  $x \cdot y = y \cdot x, \forall x, y$ .
- Reuniunea, intersecția și diferența simetrică pe mulțimea  $\mathcal{P}(M)$  a submulțimilor mulțimii  $M$ :  
 $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A, A \Delta B = B \Delta A, \forall A, B \in \mathcal{P}(M)$ .
- Adunarea matricelor pe mulțimea  $\mathcal{M}_{m, n}(\mathbb{C})$ :  
 $A + B = B + A, A, B \in \mathcal{M}_{m, n}(\mathbb{C})$ .

#### ☞ Exemple de legi de compoziție necomutative

- Scăderea pe mulțimile  $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ .
- Scăderea pe mulțimea matricelor  $\mathcal{M}_{m, n}(\mathbb{C})$ .
- Diferența mulțimilor pe mulțimea  $\mathcal{P}(A)$ .
- Compunerea funcțiilor pe mulțimea  $\mathcal{F}(M) = \{f \mid f : M \rightarrow M\}$ , dacă  $M$  are cel puțin două elemente.

## ⇒ OBSERVAȚII

1. Dacă  $\varphi : M \times M \rightarrow M$  este lege de compoziție comutativă pe mulțimea  $M$  și  $H \subset M$  este parte stabilă a lui  $M$  în raport cu  $\varphi$ , atunci operația indusă pe  $H$  de legea  $\varphi$  este comutativă. Se spune că proprietatea de comutativitate este ereditară.
2. Dacă mulțimea  $M$  este finită, comutativitatea unei operații  $\varphi$  pe  $M$  poate fi verificată pe tabla operației. Legea de compoziție este comutativă dacă tabla legii este simetrică față de diagonala principală a acesteia.

## *Exercițiu rezolvat*

- ☒ Pe mulțimea  $\mathbb{Z}$  a numerelor întregi se definește legea de compoziție  $x \circ y = xy + 2x + ay$ .  
Să se determine  $a \in \mathbb{Z}$  pentru care legea de compoziție este comutativă.

### Soluție

Avem:  $y \circ x = y \cdot x + 2y + ax$ . Din egalitatea  $x \circ y = y \circ x$  se obține  $x \cdot y + 2x + ay = y \cdot x + 2y + ax, \forall x, y \in \mathbb{Z}$ . Din faptul că înmulțirea și adunarea numerelor întregi sunt legi de compoziție comutative se obține  $(a - 2)(x - y) = 0, \forall x, y \in \mathbb{Z}$ , de unde  $a = 2$ .

## ⇒ OBSERVAȚIE

- Multe legi de compoziție se definesc cu ajutorul altor legi de compoziție. În asemenea cazuri, în demonstrarea proprietăților legii de compoziție considerate, intervin în mod esențial proprietățile legilor de compoziție folosite în definirea acestora.

## 2.2. Proprietatea de asociativitate

Fie  $M$  o mulțime nevidă.

### ❖ DEFINIȚIE

- O lege de compoziție  $M \times M \rightarrow M, (x, y) \rightarrow x \circ y$  se numește **asociativă** dacă  $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z), \forall x, y, z \in M$ .

### ☞ Exemple de legi asociative

- ♦ Adunarea și înmulțirea pe mulțimile de numere  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ :  
 $(x + y) + z = x + (y + z)$  și  $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ , pentru oricare  $x, y, z$ .