Marius Burtea

Georgeta Burtea

MATEMATICĂ

Manual pentru clasa a XII-a

$\mathcal{M}_1$

Trunchi comun

+

curriculum diferențiat

EDITURA CARMINIS PITEȘTI

CUPRINS

ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

ELEMENTE DE ALGEBRĂ

I. GRUPURI

1 Legi de compoziție pe o mulțime

1.1. Definiții și exemple

Din studiul diferitelor operații întâlnite până acum (adunarea și înmulțirea numerelor, compunerea funcțiilor, adunarea și înmulțirea matricelor etc.) se pot desprinde concluziile:

– există o mare diversitate atât în ceea ce privește natura mulțimilor pe care sunt definite aceste operații (numere, funcții, matrice, vectori, șiruri, perechi ordonate...), cât și în ceea ce privește regulile specifice după care se operează cu elementele acestor mulțimi;

– operațiile algebrice întâlnite au o serie de proprietăți comune, indiferent de natura elementelor asupra cărora operează (comutativitate, asociativitate etc.).

Reținând aspectele esențiale ale operațiilor, în acest capitol se va face o prezentare a acestora într-o formă generală prin intermediul conceptului de lege de compoziție, concept care dă posibilitatea folosirii metodei axiomatice în algebră.

❖ **DEFINIȚII**

Fie M o mulțime nevidă.

- O aplicație $\varphi : M \times M \to M, (x, y) \to \varphi(x, y)$ se numește **lege de compoziție** (operație algebrică) pe mulțimea M.
- Elementul $\varphi(x, y) \in M$, care corespunde prin aplicația φ perechii ordonate $(x, y) \in M \times M$ se numește **compusul** lui x cu y prin legea de compoziție φ.

☞ ***Exemple de legi de compoziție***

- Operația de adunare „ + “ și operația de înmulțire „ · “ pe mulțimile de numere $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$:

„ + “: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, (x, y) \to x + y,$

„ · “: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, (x, y) \to x \cdot y,$

„ + “: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, (x, y) \to x + y,$

„ · “: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, (x, y) \to x \cdot y,$ etc.

- Operația de adunare „+" pe mulțimea $\mathscr{V}$ a vectorilor din plan:
  „+": $\mathscr{V} \times \mathscr{V} \to \mathscr{V}$, $(\vec{a}, \vec{b}) \to \vec{a} + \vec{b}$.
- Operațiile de reuniune „$\cup$", intersecție „$\cap$", diferență „\", diferență simetrică „Δ", pe mulțimea $\mathscr{P}(M)$ a părților (submulțimilor) unei mulțimi M:
  „ $\cup$ ": $\mathscr{P}(M) \times \mathscr{P}(M) \to \mathscr{P}(M)$, $(A, B) \to A \cup B$,
  „ $\cap$ ": $\mathscr{P}(M) \times \mathscr{P}(M) \to \mathscr{P}(M)$, $(A, B) \to A \cap B$, etc.
- Operația de compunere „ $\circ$ " a funcțiilor pe mulțimea $\mathscr{F}(M) = \{f \mid f : M \to M\}$:
  „$\circ$": $\mathscr{F}(M) \times \mathscr{F}(M) \to \mathscr{F}(M)$, $(f, g) \to f \circ g$.

Legile de compoziție sunt date în diferite notații:

• În notație aditivă se scrie $\varphi(x, y) = x + y$; elementul $x + y \in M$ se numește **suma** lui x cu y, iar operația φ se numește **adunare**.

• În notație multiplicativă se scrie $\varphi(x, y) = x \cdot y$; elementul $x \cdot y \in M$ se numește **produsul** lui x cu y, iar operația φ se numește **înmulțire**.

Deseori, dacă $\varphi : M \times M \to M$ este o lege de compoziție (operație algebrică) pe mulțimea M, în loc de notația $\varphi(x, y)$ se folosesc notațiile $x \,\varphi\, y$, $x \circ y$, $x * y$, $x \top y$, $x \perp y$ etc.

Exercițiu rezolvat

☒ Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definește operația algebrică „ $\top$ ", astfel:
$\top : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to x \top y = xy - x - y$.

a) Să se calculeze $2 \top 3$, $5 \top (-3)$, $(-6) \top (-8)$.

b) Pentru care elemente $x \in \mathbb{R}$, avem $x \top 2 = 8$?

c) Să se rezolve ecuația $x \top (x+1) = 1$.

<u>Soluție</u>

a) $2 \top 3 = 2 \cdot 3 - 2 - 3 = 1$; $5 \top (-3) = 5 \cdot (-3) - 5 - (-3) = -17$, iar $(-6) \top (-8) = (-6) \cdot (-8) - (-6) - (-8) = 62$.

b) Avem: $x \top 2 = x \cdot 2 - x - 2 = x - 2$. Din egalitatea $x - 2 = 8$ se obține $x = 10$.

c) Avem: $x \top (x+1) = x(x+1) - x - (x+1) = x^2 - x - 1$. Rezultă ecuația $x^2 - x - 2 = 0$ cu soluțiile $x_1 = -1$, $x_2 = 2$. Așadar: $(-1) \top 0 = +1$ și $2 \top 3 = +1$.

1.2. Adunarea și înmulțirea modulo n

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ un număr natural și $a \in \mathbb{Z}$. Din teorema împărțirii cu rest a numerelor întregi rezultă că există și sunt unice numerele $q \in \mathbb{Z}$ și $r \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ cu proprietatea $a = nq + r$.

Numărul natural r care reprezintă restul împărțirii lui a la n, se notează **a mod n** (se citește „a modulo n") și se numește redusul modulo n al numărului a.

Așadar, $r = a \bmod n$.

Astfel, dacă n = 6, atunci:

$15 \bmod 6 = 3$, $5 \bmod 6 = 5$, $(-10) \bmod 6 = 2$.

Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ definim următoarele legi de compoziție:

a) $\oplus : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $a \oplus b = (a+b) \bmod n$, numită **adunarea modulo n**.

$a \oplus b$ se numește **suma modulo n** a lui a cu b.

b) $\odot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $a \odot b = (ab) \bmod n$, numită **înmulțirea modulo n**.

$a \odot b$ se numește **produsul modulo n** al lui a cu b.

Astfel, pentru n = 8, avem:

$6 \oplus 10 = (6+10) \bmod 8 = 16 \bmod 8 = 0$;

$7 \oplus 12 = (7+12) \bmod 8 = 19 \bmod 8 = 3$;

$4 \odot 3 = (4 \cdot 3) \bmod 8 = 12 \bmod 8 = 4$;

$(-2) \odot 5 = [(-2) \cdot 5] \bmod 8 = (-10) \bmod 8 = 6$.

TEMĂ

Pentru n = 6, calculați:

$2 \oplus 5$, $2 \odot 5$,

$16 \oplus 9$, $9 \odot 4$,

$(-2) \oplus 3$, $(-5) \odot 5$,

$(-7) \oplus (-9)$, $(-9) \odot (-5)$,

$(2 \oplus 9) \odot 3$, $(3 \odot 7) \oplus 8$.

1.3. Adunarea și înmulțirea claselor de resturi modulo n

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ un număr natural fixat. Pentru $a \in \mathbb{Z}$ notăm $\hat{a} = \{a + nk \mid k \in \mathbb{Z}\}$ și r = a mod n restul împărțirii lui a la n.

Din teorema împărțirii cu rest, rezultă că există $q \in \mathbb{Z}$ astfel încât $a = nq + r$.

Atunci, $\hat{a} = \{a + nk \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{r + nq + nk \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{r + nh \mid h \in \mathbb{Z}\} = \hat{r}$.

Așadar, în determinarea mulțimii $\hat{a}$ este esențial să cunoaștem restul împărțirii lui a la n.

Mulțimea $\hat{a}$ se numește **clasa de resturi modulo n** a lui a.

Deoarece resturile obținute la împărțirea cu n a numerelor întregi pot fi 0, 1, 2, ... , n − 1, rezultă că există numai n clase de resturi modulo n distincte două câte două și acestea pot fi considerate $\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \ldots, \widehat{n-1}$.

Mulțimea claselor de resturi modulo n se notează cu $\mathbb{Z}_n$ și putem scrie $\mathbb{Z}_n = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \ldots, \widehat{n-1}\}$.

Pe mulțimea $\mathbb{Z}_n$ se definesc următoarele legi de compoziție:

a) „+": $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$, $\hat{a} + \hat{b} = \widehat{a \oplus b}$, numită **adunarea claselor de resturi** modulo n, iar $\hat{a} + \hat{b}$ se numește **suma** claselor $\hat{a}$ și $\hat{b}$;

b) „·": $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$, $\hat{a} \cdot \hat{b} = \widehat{a \odot b}$, numită **înmulțirea claselor de resturi** modulo n, iar $\hat{a} \cdot \hat{b}$ se numește **produsul** claselor $\hat{a}$ și $\hat{b}$.

☞ ***Exemple***

- Fie $\mathbb{Z}_4 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}\}$. Atunci avem: $\hat{2} + \hat{1} = \hat{3}$; $\hat{2} + \hat{3} = \hat{1}$; $\hat{2} + \hat{2} = \hat{0}$ etc.

  De asemenea: $\hat{2} \cdot \hat{2} = \hat{0}$; $\hat{2} \cdot \hat{3} = \hat{2}$; $\hat{3} \cdot \hat{3} = \hat{1}$.
- În $\mathbb{Z}_5 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}\}$ avem: $\hat{2} + \hat{1} = \hat{3}$, $\hat{2} + \hat{3} = \hat{0}$, $\hat{2} + \hat{2} = \hat{4}$, $\hat{4} + \hat{3} = \hat{2}$ etc.

  De asemenea: $\hat{2} \cdot \hat{2} = \hat{4}$, $\hat{2} \cdot \hat{3} = \hat{1}$, $\hat{3} \cdot \hat{3} = \hat{4}$, $\hat{4} \cdot \hat{3} = \hat{2}$ etc.

Exerciții rezolvate

☒ **1.** Să se calculeze în $\mathbb{Z}_7$:

a) $\left(\hat{2}\right)^3$; **b)** $\left(\hat{3} \cdot \hat{4}\right) \cdot \hat{6}$; **c)** $\left(\hat{3}\right)^4 + \left(\hat{5}\right)^3$.

Soluție

Avem: **a)** $\left(\hat{2}\right)^3 = \hat{2} \cdot \hat{2} \cdot \hat{2} = \hat{4} \cdot \hat{2} = \hat{1}$; **b)** $\left(\hat{3} \cdot \hat{4}\right) \cdot \hat{6} = \hat{5} \cdot \hat{6} = \hat{2}$;

c) $\left(\hat{3}\right)^4 + \left(\hat{5}\right)^3 = \hat{3} \cdot \hat{3} \cdot \hat{3} \cdot \hat{3} + \hat{5} \cdot \hat{5} \cdot \hat{5} = \hat{2} \cdot \hat{3} \cdot \hat{3} + \hat{4} \cdot \hat{5} = \hat{6} \cdot \hat{3} + \hat{6} = \hat{4} + \hat{6} = \hat{3}$.

☒ **2.** Să se rezolve în $\mathbb{Z}_4$ ecuația $\hat{2}x^2 + \hat{2}x = \hat{0}$.

Soluție

Soluțiile ecuației pot fi doar elemente ale mulțimii $\{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}\}$.

Fie $f(x) = \hat{2}x^2 + \hat{2}x$. Avem:

- $f\left(\hat{0}\right) = \hat{2} \cdot \hat{0} + \hat{2} \cdot \hat{0} = \hat{0} + \hat{0} = \hat{0}$;
- $f\left(\hat{1}\right) = \hat{2} \cdot \hat{1} + \hat{2} \cdot \hat{1} = \hat{2} + \hat{2} = \hat{0}$;
- $f\left(\hat{2}\right) = \hat{2} \cdot \hat{0} + \hat{2} \cdot \hat{2} = \hat{0} + \hat{0} = \hat{0}$;
- $f\left(\hat{3}\right) = \hat{2} \cdot \hat{1} + \hat{2} \cdot \hat{3} = \hat{2} + \hat{2} = \hat{0}$.

❑ **TEMĂ**

Rezolvați ecuațiile:

a) $\hat{3}x + \hat{5} = \hat{0}$, în $\mathbb{Z}_8$;

b) $\hat{3}x^2 + \hat{3}x = \hat{0}$, în $\mathbb{Z}_6$;

c) $\hat{2}x^3 + \hat{3}x + \hat{2} = \hat{0}$, în $\mathbb{Z}_4$.

În concluzie, soluțiile ecuației date sunt $\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}$. După cum se observă, ecuațiile de gradul 2, pe mulțimi diferite de cele uzuale, pot avea mai mult de două soluții.

1.4. Parte stabilă. Lege de compoziție indusă

Fie M o mulțime nevidă și „$\circ$“: $M \times M \to M$ o lege de compoziție pe M.

❖ DEFINIȚIE

• O submulțime $S \subset M$ se numește **parte stabilă** a lui M în raport cu legea de compoziție „$\circ$“ dacă: $\forall\, x, y \in S$ implică $x \circ y \in S$.

Pentru cazul $S = M$ se spune că M este parte stabilă în raport cu legea de compoziție „$\circ$“.

☞ ***Exemple***

- Mulțimile de numere $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ sunt părți stabile ale lui $\mathbb{R}$ în raport cu operațiile de adunare și de înmulțire a numerelor reale.
- Mulțimile $p\mathbb{N} = \{px \mid x \in \mathbb{N}\}$, cu $p \in \mathbb{N}$ sunt părți stabile ale lui $\mathbb{N}$ în raport cu operațiile de adunare și de înmulțire a numerelor naturale.
- Fie $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ mulțimea matricelor pătrate cu elemente din mulțimea $\mathbb{C}$. Submulțimea $S \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ a matricelor inversabile este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ în raport cu înmulțirea matricelor.

Exerciții rezolvate

☒ **1.** Fie $H \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| \ a^2 + b^2 = 1 \right\}$. Să se arate că H este parte stabilă a mulțimii $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ în raport cu înmulțirea matricelor.

<u>Soluție</u>

Fie $A, B \in H$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ și $a^2 + b^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 1$. Se obține: $AB = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - by & ay + bx \\ -ay - bx & -by + ax \end{pmatrix}$. (1)

Folosind proprietatea $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$, rezultă că:

$\det(AB) = (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = 1$ și astfel $(ax - by)^2 + (ay + bx)^2 = 1$. (2)

Din relațiile (1) și (2) rezultă că $AB \in H$, deci H este parte stabilă a mulțimii $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ în raport cu înmulțirea.

☒ **2.** Să se arate că mulțimea $\mathcal{R}_n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ este parte stabilă a lui $\mathbb{Z}$ în raport cu adunarea modulo n și înmulțirea modulo n.

<u>Soluție</u>

Dacă $a, b \in \mathscr{R}_n$, atunci, din definiție, $a \oplus b$ și $a \odot b$ reprezintă restul împărțirii numerelor $a + b$ și $a \cdot b$ la n. În concluzie, $a \oplus b$ și $a \odot b$ sunt elemente ale lui $\mathscr{R}_n$.

Dacă H este parte stabilă a lui M în raport cu legea de compoziție $\varphi : M \times M \to M$, atunci pe mulțimea H se poate defini o lege de compoziție $\psi : H \times H \to H$, considerând $\psi(x, y) = \varphi(x, y)$, $\forall\, x, y \in H$.

Legea de compoziție ψ se numește **legea de compoziție indusă** pe mulțimea H de către legea de compoziție φ.

Pentru simplificarea scrierii, se obișnuiește să se folosească aceeași notație pentru legea de compoziție pe M și legea de compoziție indusă pe H.

1.5. Tabla unei legi de compoziție

Fie M o mulțime finită, $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ și $\varphi : M \times M \to M$ o lege de compoziție pe M.

Legea de compoziție φ poate fi descrisă printr-un tablou cu n linii și n coloane corespunzător elementelor $a_1, a_2, \ldots, a_n$. La intersecția liniei i cu coloana j se află elementul $\varphi(a_i, a_j)$.

φ	a_1	a_2	$\ldots$		a_j		$\ldots$	a_n
a_1					$\vdots$			
a_2					$\vdots$			
$\vdots$					$\vdots$			
a_i	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$		$\varphi(a_i, a_j)$		$\ldots$	$\ldots$
$\vdots$					$\vdots$			
a_n					$\vdots$			

Acest tablou se numește **tabla legii de compoziție** sau **tabla lui Cayley**.

Tabla unei legi de compoziție are un rol deosebit în perfecționarea calculelor algebrice, precum și în verificarea unor proprietăți ale legii de compoziție.

Exerciții rezolvate

☒ **1.** Fie $H = \{z \in \mathbb{C} \mid z^4 = 1\}$. Să se arate că H este parte stabilă a mulțimii $\mathbb{C}$ în raport cu înmulțirea numerelor complexe.

<u>Soluție</u>

Ecuația $z^4 = 1$ se scrie $(z^2 - 1)(z^2 + 1) = 0$, de unde se obține $z \in \{-1, 1, i, -i\} = H$. Alcătuim tabla operației de înmulțire pe H.

$\cdot$	-1	1	$-i$	i
-1	1	-1	i	$-i$
1	-1	1	$-i$	i
$-i$	i	$-i$	-1	1
i	$-i$	i	1	-1

După cum se observă din tabla operației, toate rezultatele obținute în urma compunerii elementelor aparțin mulțimii H. În concluzie, mulțimea H este parte stabilă a lui $\mathbb{C}$ în raport cu înmulțirea.

☒ **2.** Să se alcătuiască tablele operațiilor de adunare și de înmulțire modulo 4 pe $\mathscr{R}_4$ și de adunare și de înmulțire pe mulțimea claselor de resturi $\mathbb{Z}_4$.

<u>Soluție</u>

Având în vedere modul în care s-au definit operațiile pe mulțimile $\mathscr{R}_4$ și $\mathbb{Z}_4$, avem:

$\oplus$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$\odot$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

$+$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$
$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$

$\cdot$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$
$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$
$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{2}$	$\hat{1}$

☒ **3.** Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziție $x \circ y = xy + x + y$, $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$. Să se arate că mulțimea $M = [-2, 0]$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea de compoziție „ $\circ$ “.

<u>Soluție</u>

Trebuie arătat că dacă $x, y \in [-2, 0]$, atunci $x \circ y \in [-2, 0]$. Deoarece $x, y \in [-2, 0]$, rezultă că $-2 \le x \le 0$, $-2 \le y \le 0$ sau $-1 \le x + 1 \le 1$, $-1 \le y + 1 \le 1$ și se obțin inegalitățile $|x+1| \le 1$, $|y+1| \le 1$. Prin înmulțire, avem inegalitatea $|(x+1)(y+1)| \le 1$, care se scrie sub forma $-1 \le (x+1)(y+1) \le 1$. După reduceri se obține: $-2 \le xy + x + y \le 0$, deci $x \circ y \in [-2, 0]$.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ se definește operația algebrică „$\circ$" astfel: $x \circ y = 2x + y - 3,\ \forall\ x, y \in \mathbb{Z}$.

a) Să se calculeze $4 \circ 7$, $8 \circ (-1)$, $(-8) \circ 3$ și $3 \circ (-8)$.

b) Să se afle valorile $x \in \mathbb{Z}$ pentru care $x \circ (3x - 1) = 6$.

c) Să se rezolve ecuația $(x + 1) \circ 3 = 5 \circ (x^2 - 8)$.

E2. Pe mulțimea $\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R} \right\}$ definim operația algebrică $A \perp B = 3A - 2B,\ \forall\ A, B \in \mathcal{M}$.

a) Să se arate că $I_2 \in \mathcal{M}$.

b) Să se calculeze $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Să se determine $a \in \mathbb{R}$, știind că $\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 & a^2 \\ a^2 & 1 \end{pmatrix} = I_2$.

E3. Să se calculeze:

a) 18 mod 5; 28 mod 6; 17 mod 8; (-3) mod 4;

b) $5 \oplus 4$; $6 \oplus 11$; $(-2) \oplus 5$; $(-4) \oplus (-13)$, dacă $n = 9$;

c) $2 \odot 7$; $5 \odot 8$; $(-3) \odot 17$; $(-5) \odot (-11)$, dacă $n = 10$.

E4. Să se calculeze:

a) $\widehat{23}, \widehat{21}, \hat{9}, \widehat{-3}, \widehat{-7}$ în $\mathbb{Z}_3$;

b) $\hat{2} + \widehat{11}, \hat{3} + \hat{7}, \hat{5} + \hat{9}$ în $\mathbb{Z}_4$;

c) $\hat{2} \cdot \hat{4}, \hat{4} \cdot \hat{3}, (\hat{3})^3, (\hat{5})^4$ în $\mathbb{Z}_6$;

d) $(\hat{2} + \hat{3}) \cdot (\hat{4} + \hat{5}) \cdot (\hat{3} + \hat{6})$ în $\mathbb{Z}_7$.

E5. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\hat{2}x + \hat{1} = \hat{0}$, în $\mathbb{Z}_3$;

b) $x^2 + \hat{1} = \hat{0}$, în $\mathbb{Z}_5$;

c) $\hat{3}x^2 - \hat{5}x + \hat{2} = \hat{0}$, în $\mathbb{Z}_4$;

d) $x^3 + \hat{2}x + \hat{3} = \hat{0}$, în $\mathbb{Z}_5$.

E6. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definesc operațiile algebrice $x \circ y = x + y - xy$ și $x \top y = x - y + 2xy,\ \forall\ x, y \in \mathbb{R}$. Să se rezolve:

a) ecuația $x \circ x = x \top x$;

b) sistemul $\begin{cases} (x + 3y) \circ 3 = -19 \\ (x - 2y) \top 2 = -22 \end{cases}$.

E7. Pe mulțimea $M = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ se consideră legea de compoziție $x \circ y = |x - y|,\ \forall\ x, y \in M$. Să se alcătuiască tabla operației și să se arate că M este parte stabilă în raport cu această lege de compoziție.

E8. Să se alcătuiască tabla operației „$\circ$" pe mulțimea M și să se studieze dacă mulțimea este parte stabilă în raport cu „$\circ$", dacă:

a) $M = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ divide } 12\}$, $x \circ y = \text{c.m.m.d.c.}(x, y)$;

b) $M = \{2, 3, 4, 5\}$, $x \circ y = \min(x, y)$;

c) $M = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $x \circ y = \max(x, y)$.

E9. Să se arate că mulțimea M este parte stabilă în raport cu legea de compoziție specificată:

a) $M = [2, +\infty)$, $x \circ y = xy - 2(x + y) + 6$;

b) $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}$, în raport cu adunarea matricelor;

c) $M=\left\{\begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{Q}, a^2-2b^2=1\right\}$, în raport cu înmulțirea matricelor.

E10. Pe mulțimea $M=\{1, 2, 3, 4\}$ se consideră operația algebrică „∘" a cărei tablă este dată mai jos:

∘	1	2	3	4
1	1	3	4	1
2	1	3	4	2
3	2	1	3	4
4	4	3	2	1

a) Să se determine $x=1\circ(2\circ3)$, $y=4\circ(3\circ2)$, $z=(1\circ2)\circ(3\circ4)$.

b) Să se rezolve ecuațiile $x\circ2=4$, $4\circ x=2$ și $x\circ2\circ x=1$.

c) Să se rezolve sistemele de ecuații:
$\begin{cases} x\circ2=y \\ y\circ2=x \end{cases}$ și $\begin{cases} x\circ y=1 \\ (x+1)\circ y=1 \end{cases}$.

E11. Fie $\mathscr{M}=\left\{A=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| a\in\mathbb{C}\right\}$ și legea de compoziție $X\perp Y=X+Y-I_2$, $\forall X, Y\in\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ definită pe mulțimea $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.

Să se arate că mulțimea $\mathscr{M}$ este parte stabilă a mulțimii $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ în raport cu operația de înmulțire a matricelor și în raport cu operația „$\perp$".

APROFUNDARE

A1. Să se determine mulțimile $M\subset\mathbb{Z}_4$, care sunt părți stabile ale lui $\mathbb{Z}_4$ în raport cu operația de adunare.

A2. Să se arate că mulțimea M este parte stabilă în raport cu operația specificată:

a) $M=(a, +\infty)$, $x\circ y=xy-a(x+y)+a^2+a$;

b) $M=[4, 6]$, $x\circ y=xy-5(x+y)+30$;

c) $M=(-1, 1)$, $x\circ y=\dfrac{x+y}{1+xy}$.

A3. Pe mulțimea $M=(2, +\infty)$ se consideră legea de compoziție:
$x\circ y=\dfrac{xy-2}{x+y-3}$, $\forall x, y\in M$.
Să se arate că M este parte stabilă în raport cu „∘".

A4. Se consideră mulțimea
$\mathbb{Z}[\sqrt{3}]=\{a+b\sqrt{3} \mid a, b\in\mathbb{Z}\}$.
Să se arate că:

a) mulțimea $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ este parte stabilă în raport cu adunarea și înmulțirea;

b) mulțimea $M=\{a+b\sqrt{3} \mid a, b\in\mathbb{Z}, a^2-3b^2=1\}$ este parte stabilă a mulțimii $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ în raport cu înmulțirea.

A5. Se consideră funcțiile $f_1, f_2, f_3, f_4:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $f_1(x)=x$, $f_2(x)=\dfrac{1}{x}$, $f_3(x)=-x$, $f_4(x)=-\dfrac{1}{x}$. Să se arate că mulțimea $M=\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ este parte stabilă în raport cu compunerea funcțiilor.

A6. Fie $M=(2, +\infty)$ și legea de compoziție pe M: $x\circ y=xy-2x-2y+a$, $\forall x, y\in M$.

a) Să se determine valoarea minimă a lui $a\in\mathbb{R}$, astfel încât M să fie parte stabilă în raport cu „∘".

b) Să se rezolve ecuația $4\circ x=8$.

c) Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases}(x+2)\circ(y-3)=46\\(2x+1)\circ(y+1)=59\end{cases},\ \text{pentru } a=50.$$

A7. **Să se studieze dacă mulțimea M este parte stabilă a lui $\mathbb{C}$ în raport cu înmulțirea:**

a) $M=\{z\in\mathbb{C}\mid z^3=1\}$;

b) $M=\{z\in\mathbb{C}\mid z=\bar{z}\}$;

c) $M=\{z\in\mathbb{C}\mid z^2=\bar{z}\}$;

d) $M=\{z\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Re}(z)=0\}$.

A8. **Să se determine mulțimile finite $M\subset\mathbb{R}$, care sunt părți stabile ale lui $\mathbb{R}$ în raport cu operația de înmulțire. Aceeași problemă pentru mulțimea $\mathbb{C}$.**

A9. **Fie M o mulțime cu 3 elemente. Să se determine numărul legilor de compoziție care se pot defini pe mulțimea M. Generalizare.**

2 Proprietăți ale legilor de compoziție

2.1. Proprietatea de comutativitate

Fie M o mulțime nevidă.

❖ DEFINIȚIE

• Legea de compoziție „$\circ$“: $M\times M\to M$, $(x,y)\to x\circ y$ se numește **comutativă** dacă $x\circ y=y\circ x$, $\forall x, y\in M$.

☞ ***Exemple de legi de compoziție comutative***

- Adunarea și înmulțirea pe mulțimile de numere $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$. Avem: $x+y=y+x$ și $x\cdot y=y\cdot x$, $\forall x, y$.
- Reuniunea, intersecția și diferența simetrică pe mulțimea $\mathcal{P}(M)$ a submulțimilor mulțimii M: $A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$, $A\Delta B=B\Delta A$, $\forall A, B\in\mathcal{P}(M)$.
- Adunarea matricelor pe mulțimea $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$: $A+B=B+A$, $A, B\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$.

☞ ***Exemple de legi de compoziție necomutative***

- Scăderea pe mulțimile $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.
- Scăderea pe mulțimea matricelor $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$.
- Diferența mulțimilor pe mulțimea $\mathcal{P}(A)$.
- Compunerea funcțiilor pe mulțimea $\mathcal{F}(M)=\{f\mid f:M\to M\}$, dacă M are cel puțin două elemente.

➲ OBSERVAȚII

1. Dacă $\varphi : M \times M \to M$ este lege de compoziție comutativă pe mulțimea M și $H \subset M$ este parte stabilă a lui M în raport cu φ, atunci operația indusă pe H de legea φ este comutativă. Se spune că proprietatea de comutativitate este ereditară.
2. Dacă mulțimea M este finită, comutativitatea unei operații φ pe M poate fi verificată pe tabla operației. Legea de compoziție este comutativă dacă tabla legii este simetrică față de diagonala principală a acesteia.

Exercițiu rezolvat

☒ Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ a numerelor întregi se definește legea de compoziție $x \circ y = xy + 2x + ay$.

Să se determine $a \in \mathbb{Z}$ pentru care legea de compoziție este comutativă.

Soluție

Avem: $y \circ x = y \cdot x + 2y + ax$. Din egalitatea $x \circ y = y \circ x$ se obține $x \cdot y + 2x + ay = y \cdot x + 2y + ax,\ \forall\ x, y \in \mathbb{Z}$. Din faptul că înmulțirea și adunarea numerelor întregi sunt legi de compoziție comutative se obține $(a-2)(x-y) = 0,\ \forall\ x, y \in \mathbb{Z}$, de unde $a = 2$.

➲ OBSERVAȚIE

- Multe legi de compoziție se definesc cu ajutorul altor legi de compoziție. În asemenea cazuri, în demonstrarea proprietăților legii de compoziție considerate, intervin în mod esențial proprietățile legilor de compoziție folosite în definirea acestora.

2.2. Proprietatea de asociativitate

Fie M o mulțime nevidă.

❖ DEFINIȚIE

- O lege de compoziție $M \times M \to M,\ (x, y) \to x \circ y$ se numește **asociativă** dacă $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z),\ \forall x, y, z \in M$.

☞ ***Exemple de legi asociative***

- Adunarea și înmulțirea pe mulțimile de numere $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$: $(x + y) + z = x + (y + z)$ și $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$, pentru oricare x, y, z.